Les coordonnées de H' :

Le point H' est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC) ; alors ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x = 1 + t & (1) \\ y = 1 + t & (2) \\ z = 4 - t & (3) \\ x + y - z = 0 & (4) \end{cases}$$

Dans la relation (4) on remplace x et y et z par les relations (1) et (2) et (3) ainsi on obtient l'équation :

$$1 + t + 1 + t - 4 + t = 0 \Rightarrow 3t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

Ainsi : $x = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ et $y = \frac{5}{3}$ et $z = 4 - \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

D'où : $\boxed{H'\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)}$

Exercice 10 :

1) Mq (S) est une sphère de centre $\Omega(1; -2; -2)$ et de rayon 2 :

On a : $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 + 4z + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 + z^2 + 4z + 4 - 4 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 2)^2 = 4 = 2^2$

Donc **(S) est une sphère de centre $\Omega(1; -2; -2)$ et de rayon $R = 2$**

2) a) Calculons $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ puis déduire l'aire du triangle ABC

On a : $A(-2; 0; 0)$ et $B(0; 1; 0)$ et $C(0; 0; -1)$ donc :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$
$$= -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\ (-1; 2; -2)}$

L'aire du triangle ABC est :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$$

b) Equation cartésienne du plan (ABC) :

Puisque : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$; alors le plan (ABC) admet $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ comme vecteur normal ; Ainsi : $(ABC): -x + 2y - 2z + c = 0$

Or $A(-2; 0; 0) \in (ABC) \Rightarrow 2 + c = 0 \Rightarrow c = -2$

D'où : $\boxed{(ABC): -x + 2y - 2z - 2 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z + 2 = 0}$

3) a) Calculons $d(\Omega; (ABC))$:

On a : $d = d(\Omega; (ABC)) = \frac{|1+4-4+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{|3|}{3} = \mathbf{1}$

b) Déduction :

On a : $d = 1 < R = 2$; Alors le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C)) de centre H et de rayon

$$\boxed{r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}}$$

Les coordonnées de H :

Le point H est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC) ; alors ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x = 1 + t & (1) \\ y = -2 - 2t & (2) \\ z = -2 + 2t & (3) \\ x - 2y + 2z + 2 = 0 & (4) \end{cases}$$

Dans la relation (4) on remplace x et y et z par les relations (1) et (2) et (3) ainsi on obtient l'équation :

$$1 + t + 4 + 4t - 4 + 4t + 2 = 0 \Rightarrow 9t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1}{3}$$

Ainsi : $x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et $y = -2 + \frac{2}{3} = \frac{-4}{3}$ et $z = -2 - \frac{2}{3} = \frac{-8}{3}$

D'où : $\boxed{H\left(\frac{2}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{-8}{3}\right)}$

4) a) Vq les points $\Omega; A; B; C$ ne sont pas coplanaires :

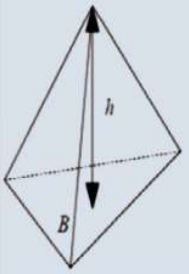
Il suffit de montrer que $\Omega \notin (ABC)$ autrement dit ses coordonnées ne vérifient pas l'équation cartésienne du plan (ABC).

On a : $x_\Omega - 2y_\Omega + 2z_\Omega + 2 = 1 + 4 - 4 + 2 = 3 \neq 0$

Donc $\Omega \notin (ABC)$; ainsi **les points $\Omega; A; B; C$ ne sont pas coplanaires**

b) Calcul du volume du tétraèdre ΩABC :

Rappel



Le volume d'un tétraèdre (pyramide à base triangulaire) est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h$$

La base est l'une des 4 faces triangulaires.

La hauteur est la distance entre le sommet qui n'est pas sur la base et la base ; la hauteur est donc la longueur du segment joignant le sommet qui n'est pas sur la base à sa projection orthogonale sur la base.

En se basant sur ce rappel on a :

$$V_{\Omega ABC} = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times d(\Omega; (ABC)) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

Exercice 12.

1) b) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$:

On a : $A(1; 1; 0)$ et $B(1; -1; 1)$ et $C(0; 1; 1)$ donc :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$
$$= -2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$

Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\ (-2; -1; -2)}$

Puisque $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$; alors les points A et B et C ne sont pas alignés.

b) Equation cartésienne du plan (ABC) :

Puisque $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à (ABC) ; donc :

$(ABC): -2x - y - 2z + c = 0$

Or $A(1; 1; 0) \in (ABC) \Rightarrow -3 + c = 0 \Rightarrow c = 3$

D'où : $\boxed{(ABC): -2x - y - 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 2z - 3 = 0}$

c) Vq : $(P) \perp (ABC)$:

On a $(ABC): 2x + y + 2z - 3 = 0$ et $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$

Donc $\vec{n}(2; 1; 2) \perp (ABC)$ et $\vec{n}'(1; 2; -2) \perp (P)$

D'autre part : $\vec{n}.\vec{n}' = 2 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times (-2) = 4 - 4 = 0$

D'où : $\boxed{(P) \perp (ABC)}$

d) Equation cartésienne de la droite $(\Delta) = (ABC) \cap (P)$:

- **Première méthode :**

On cherche un point d'intersection entre les deux plans et on prend $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ comme vecteur directeur de la droite (Δ).

Pour trouver un point d'intersection ; on pose par exemple $z = 0$ dans les équations des deux plans et on résout le système :

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Ainsi $E\left(\frac{7}{3}; \frac{-5}{3}; 0\right) \in (ABC) \cap (P)$

Maintenant on calcule $\vec{n} \wedge \vec{n}'$:

$$\vec{n} \wedge \vec{n}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$
$$= -6\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn

Scanned by DocumentScanner | Lufick